J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
Vol. 44 (1996) 529-549

RIGIDITÉ DE L'ALGÈBRE DE LIE DES CHAMPS DE VECTEURS UNIMODULAIRES

PIERRE B. A. LECOMTE & CLAUDE ROGER

A la mémoire de Georges REEB (1920–1993)

Abstract

We prove rigidity for the Lie algebra of vector fields with vanishing divergence of a compact manifold of dimension greater than or equal to 3. In dimension strictly greater than 3, one has vanishing second cohomology space in adjoint representation and thus infinitesimal rigidity. In dimension 3 one has a nontrivial class in adjoint cohomology, but one can not prolongate the deformation and one deduces the rigidity.

Résumé

Nous démontrons la rigidité de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs à divergence nulle sur une variété compacte de dimension supérieure ou égale à 3. En dimension strictement plus grande que 3, la cohomologie adjointe en degr é 2 est nulle et on a rigidité infinitésimale. En dimension 3, on trouve une classe en cohomologie adjointe mais on ne peut pas prolonger la déformation, ce qui nous permet de conclure à la rigidité.

1. Introduction et notions préliminaires

Le but de ce travail est de démontrer la rigidité (pour les cochaînes locales) de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs unimodulaires sur une variété munie d'une forme volume. Si V est une variété munie d'une forme volume ω, on note $\mathcal{A}(V)$ l'algèbre de Lie des champs de

Received September 21, 1994.
Classification AMS 17 B-65 – 53 C 15 – 58 H 10 – 58 H 15.
Mots clés : champs de vecteurs unimodulaires. Cohomologie des algèbres de Lie. Déformations.

vecteurs tangents à V; on dit qu'un champ $X \in \mathcal{A}(V)$ est unimodulaire s'il vérifie $L_X\omega = 0$. L'espace des champs unimodulaires forme une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{A}(V)$ notée $\mathcal{SA}(V)$.

Pour dégager la notion de rigidité, rappelons très brièvement le formalisme des déformations des structures d'algèbre de Lie; soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie avec son crochet $[,]$; on dit que l'on a une déformation formelle du crochet si on a une application bilinéaire antisymétrique

$$[,]_t : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}[[t]]$$

de la forme

$$[,]_t = [,] + \sum_{p=1}^{+\infty} t^p c_p,$$

les c_p étant des applications bilinéaires antisymétriques de $\mathcal{G}$ à valeurs dans lui-même, dont le prolongement naturel à $\mathcal{G}[[t]]$ est une structure d'algèbre de Lie sur $\mathcal{G}[[t]]$. On définit de la même façon les notions de déformation à l'ordre p en demandant une structure d'algèbre de Lie sur $\mathcal{G}[[t]]/(t^{p+1} = 0)$ que l'on appelle infinitésimale si $p = 1$. On dit que l'on a une déformation vraie si la série converge pour certaines valeurs de t réelles, définissant ainsi une famille à 1 paramètre de structures d 'algèbres de Lie sur l'espace sous-jacent à $\mathcal{G}$. (Voir [3], [7] pour les détails sur la formalisme algébrique nécessaire à cette théorie de déformations, et notamment pour les notions d'équivalence de déformati ons).

En écrivant l'identité de Jacobi pour $[,]_t$, on aboutit à des relations obtenues en annulant les coefficients de t^p dans l'expression

$$\sum_{(cycl)} [[X, Y]_t, Z]_t$$

(le symbole $(cycl)$ désigne la sommation sur les permutations circulaires de (X, Y, Z)). On trouve

$$dc_1 = 0, \dots, dc_p = P_p(c_1, \dots, c_{p-1}),$$

les P_p étant des combinaisons multilinéaires de $c_1, \dots, c_{p-1}$ et d étant la différentielle du complexe de Chevalley-Eilenberg $C^*(\mathcal{G}, \mathcal{G})$, permettant de calculer la cohomologie de $\mathcal{G}$ à coefficients dans sa représentation adjointe. En particulier, c_1 est un 1-cocycle; sa classe de cohomologie $[c_1] \in H^2(\mathcal{G}, \mathcal{G})$ est un invariant de la déformation. Les autres équations cohomologiques expriment que les cocycles définis inductivement par $P_p(c_1, \dots, c_{p-1})$ sont des cobords; on trouve donc dans $H^3(\mathcal{G}, \mathcal{G})$ une suite d'obstructions potentielles à prolonger une déformation infinitésimale en déformations à l'ordre 2, puis $3 \dots p$, etc.

La seconde équation s'écrit

$$dc_2(X,Y,Z) = \frac{1}{2} \sum_{(cycl)} c_1(c_1(X,Y),Z).$$

Cette dernière expression est appelée crochet de Richardson-Nijenhuis de c_1 par lui-même. Plus généralement, si c et d sont deux applications bilinéaires antisymétriques d'un espace vectoriel dans lui-même, alors le crochet $[[c,d]]$ est l'application trilinéaire antisymétrique définie par

$$[[c,d]](X,Y,Z) = \sum_{(cycl)} (c(d(X,Y),Z) + d(c(X,Y),Z)).$$

Dans le cas d'une algèbre de Lie, si c et d sont des cocycles, alors $[[c,d]]$ est cocycle, et si c est cocycle et d cobord, alors $[[c,d]]$ est cobord. Le crochet de Richardson-Nijenhuis est donc bien défini au niveau des classes de cohomologie.

Pour étudier les déformations d'une algèbre de Lie $\mathcal{G}$, il faut donc calculer $H^2(\mathcal{G},\mathcal{G})$, puis les crochets $[[c,c]]$, pour prolonger à l 'ordre 2 la déformation infinitésimale donnée par les 2-cocycles c. Si $H^2(\mathcal{G},\mathcal{G}) = 0$, il n'y a pas de déformation infinitésimale nontriviale, et a fortiori de déformation formelle; on dit que $\mathcal{G}$ est *infinitésimalement rigide.* Si $\mathcal{G}$ n'admet pas de déformation formelle non triviale, on dit que $\mathcal{G}$ est *rigide.*

Rappelons que l'algèbre des champs unimodulaires apparaît dans la classification des algèbres de Lie de champs de vecteurs simples, primitives, transitives (dites aussi "classiques") due à E. Cartan (cf. par exemple [8]); citons en outre parmi celles-ci l'algèbre de Lie de tous les champs tangents, celle des automorphismes d'une structure de contact, celle des automorphismes d'une structure symplectique.

A. Lichnerowicz et ses collaborateurs ont entamé dans les années 70 un vaste programme visant à étudier ces algèbres du point de vue de leurs automorphismes, dérivations et déformations (cf. par exemple [8, 9, 10, 11, 3]), ce qui a nécessité la mise au point d'un appareil cohomologique assez compliqué. Le plus connu de ces développements est la détermination des déformations du crochet de Poisson d'une variété symplectique, à l'origine de la théorie des $*$-produits et de la quantification par déformations.

Pour le cas de l'algèbre de Lie des champs tangents et de celle des champs de contact, on peut conclure assez facilement à la rigidité (cf. [11]). Le seul cas non encore étudié à ce jour est celui de l'algèbre des champs de vecteurs unimodulaires, hormis l'article de Lichnerowicz où sont déterminés les idéaux et dérivations de cette algèbre ([9]).

Dans cet article, nous démontrons la rigidité de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs unimodulaires. Dans le cas où la dimension de la variété est différente de 3, le résultat résulte de ce que $H^2(\mathcal{SA}(V), \mathcal{SA}(V)) = 0$. Le cas de la dimension 3 est nettement plus délicat; il y a des déformations infinitésimales non triviales et il faut mener à bien un subtil calcul d'obstructions pour pouvoir conclure à la rigidité (Th. 2). Le fait que le cas de la dimension 3 soit différent des autres n'est pas surprenant : rappelons par exemple l'existence de l'invariant d'Arnold ([1]) en dimension 3 qui munit $\mathcal{SA}(V)$ d'une forme bilinéaire symétrique invariante et non dégénérée.

Il convient parfois de restreindre l'espace des cochaînes considérées à certains sous-espaces, stables pour $[[,]]$. C'est en particulier le cas pour $\mathcal{A}(V)$ et $\mathcal{SA}(V)$, à propos desquels on impose le plus souvent aux cochaînes des conditions de continuité ou de localité. *Nous nous limitons ici à des cochaînes locales* (au sens de la section 2.1) *et nous n'établissons la rigidité de $\mathcal{SA}(V)$ que pour les déformations dont les coefficients sont locaux.*

Les auteurs remercient André Lichnerowicz pour de nombreuses discussions sur ce sujet; ce travail a été effectué dans le cadre de la convention d'échanges CNRS/CGRI/FNRS 1993.

2. La cohomologie de $\mathcal{SA}(V)$ dans la représentation adjointe en bas degrés

2.1 La résolution fine de $\mathcal{SA}(V)$ et de l'hypercohomologie

Nous aurons à considérer des cochaînes sur $\mathcal{SA}(V)$ à valeurs dans divers faisceaux ou fibrés sur lesquels $\mathcal{SA}(V)$ opère . Nous considérerons les cochaînes sur $\mathcal{SA}(V)$ qui sont restrictions de cochaînes locales sur $\mathcal{A}(V)$ à valeurs dans $\mathcal{F}$. Rappelons qu'une p-cochaîne c sur $\mathcal{A}(V)$ à valeurs dans un faisceau $\mathcal{F}$ est *locale* si

$$\operatorname{Supp}(c(\xi_1, \dots, \xi_p)) \subset \bigcap_{i-1}^{p} \operatorname{Supp}(\xi_i)$$

pour tous les $\xi_1, \dots, \xi_p$ dans $\mathcal{A}(V)$. Le théorème bien connu de J. Peetre assure alors que ces cochaînes sont données localement par des opérateurs multidifférentiels; on peut trouver une description détaillée de ces cochaînes dans l'article de Shiga ([12]). Nous noterons $C^p(\mathcal{SA}(V), \mathcal{F})$ cet espace de cochaînes, restreintes à $\mathcal{SA}(V)$ (l'indice *loc*, traditionnel en pareil cas, sera omis, car nous n'aurons pas à considérer d'autres types de cochaînes). Le support $\mathrm{Supp}(c)$ d'une cochaîne c est alors le plus grand des fermés F tels que $F \cap \mathrm{Supp}(\xi) = \emptyset$ implique $i(\xi)c = 0$. Nous noterons $\mathcal{C}^p(\mathcal{SA}(V), \mathcal{F})$ le faisceau des p-cochaînes locales de $\mathcal{SA}(V)$ à valeurs dans $\mathcal{F}$ et $C^p(\mathcal{SA}(V), \mathcal{F})$ l'espace des sections globales de ce faisceau. Il est d'autre part immédiat de voir que, puisque $\mathrm{Supp}[\xi, \eta] \subset \mathrm{Supp}(\xi) \cap \mathrm{Supp}(\eta)$, la différentielle respecte les supports et, par conséquent, on a un complexe de faisceaux $\mathcal{C}^*(\mathcal{SA}(V), \mathcal{F}), d)$ dont les sections globales donnent le complexe de Chevalley-Eilenberg $(C^*(\mathcal{SA}(V), \mathcal{F}), d)$ permettant de calculer la cohomologie de $\mathcal{SA}(V)$ à coefficients dans $\mathcal{F}$, qui sera notée $H^*(\mathcal{SA}(V), \mathcal{F})$.

Une des difficultés des calculs cohomologiques concernant $\mathcal{SA}(V)$ est que le faisceau associé $\mathcal{SA}(V)$ n'est pas un faisceau fin : on ne peut pas recoller ses sections par des partitions de l'unité; par contre, il existe une résolution de longueur 2 de $\mathcal{SA}(V)$ par des faisceaux fins :

$$0 \longrightarrow \mathcal{SA}(V) \xrightarrow{i} \Omega^{n-1} \xrightarrow{D} \Omega^n \longrightarrow 0$$

avec $i(X) = i_X\omega$ (nous notons D la différentielle de De Rham, contrairement à la tradition, pour ne pas induire de confusion avec la différentielle de Chevalley-Eilenberg). Il est immédiat de vérifier que l'on a bien une suite exacte courte de faisceaux; comme d'autre part, $i_{[X,Y]} = L_Y i_X\omega$ si X et Y sont dans $\mathcal{SA}(V)$, c'est de plus une suite exacte de représentations de $\mathcal{SA}(V)$.

Cette suite exacte courte de représentations induit une suite exacte courte de complexes de faisceaux

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathcal{C}^*(\mathcal{SA}(V), \mathcal{SA}(V)) &\xrightarrow{i_*} \mathcal{C}^*(\mathcal{SA}(V), \Omega^{n-1}) \\ &\xrightarrow{D_*} \mathcal{C}^*(\mathcal{SA}(V), \Omega^n) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Elle induit une suite exacte longue en hypercohomologie (voir [5] et l'appendice 1 pour la construction de l'hypercohomologie et des suites spectrales associées)

$$
(2.1)\qquad
\begin{aligned}
\cdots &\xrightarrow{\partial} \mathbb{H}^k(\mathcal{C}^*(\mathcal{SA}(V),\mathcal{SA}(V))) \xrightarrow{i_*} \mathbb{H}^k(\mathcal{C}^*(\mathcal{SA}(V),\Omega^{n-1}))\\
&\xrightarrow{D_*} \mathbb{H}^k(\mathcal{C}^*(\mathcal{SA}(V),\Omega^n)) \xrightarrow{\partial} \mathbb{H}^{k+1}(\mathcal{C}^*(\mathcal{SA}(V),\mathcal{SA}(V)))\\
&\xrightarrow{i_*} \mathbb{H}^{k+1}(\mathcal{C}^*(\mathcal{SA}(V),\Omega^{n-1})) \longrightarrow \cdots
\end{aligned}
$$

Lemme 1. $\mathbb{H}^k(\mathcal{C}^*(\mathcal{SA}(V),\Omega^{n-1})) = H^k(\mathcal{SA}(V),\Omega^{n-1})$.

Démonstration. Les faisceaux $\mathcal{C}^*(\mathcal{SA}(V),\Omega^{n-1})$ sont fins. La première suite spectrale d'hypercohomologie vérifie donc

$$E_1^{p,q} = H^q(V,\mathcal{C}^p(\mathcal{SA}(V),\Omega^{n-1})) = 0,$$

si $q \neq 0$ et

$$E_1^{p,0} = C^p(\mathcal{SA}(V),\Omega^{n-1}).$$

De là , $E_2^{p,q} = 0$ si $q \neq 0$ et $E_2^{p,q} = H^p(\mathcal{SA}(V),\Omega^{n-1})$. q.e.d.

Le calcul de $\mathbb{H}^k(\mathcal{C}^*(\mathcal{SA}(V),\mathcal{SA}(V)))$ est plus délicat. La première suite spectrale d'hypercohomologie donne

$$E_1^{p,q} = H^q(V,\mathcal{C}^p(\mathcal{SA}(V),\mathcal{SA}(V))).$$

On peut calculer cet espace à l'aide de la suite exacte longue associée à la suite exacte courte de faisceaux

$$
\begin{aligned}
0 \longrightarrow \mathcal{C}^p(\mathcal{SA}(V),\mathcal{SA}(V)) &\xrightarrow{i_*} \mathcal{C}^p(\mathcal{SA}(V),\Omega^{n-1})\\
&\xrightarrow{D_*} \mathcal{C}^p(\mathcal{SA}(V),\Omega^n) \longrightarrow 0.
\end{aligned}
$$

Les faisceaux $\mathcal{C}^p(\mathcal{SA}(V),\Omega^p)$, $p = n-1$, n étant fins, cette suite se réduit à quatre termes

$$
\begin{aligned}
&0 \longrightarrow C^p(\mathcal{SA}(V),\mathcal{SA}(V)) \xrightarrow{i_*} C^p(\mathcal{SA}(V),\Omega^{n-1})\\
&\xrightarrow{D_*} C^p(\mathcal{SA}(V),\Omega^n) \xrightarrow{\partial} H^1(V,\mathcal{C}^p(\mathcal{SA}(V),\mathcal{SA}(V))) \longrightarrow 0.
\end{aligned}
$$

D'où

$$
\begin{aligned}
E_1^{p,q} &= 0 \quad \text{si} \quad q > 1,\\
E_1^{p,0} &= C^p(\mathcal{SA}(V),\mathcal{SA}(V)),\\
E_1^{p,1} &= H^1(V,\mathcal{C}^p(\mathcal{SA}(V),\mathcal{SA}(V)),\\
&= [\text{Coker } D_* : C^p(\mathcal{SA}(V),\Omega^{n-1}) \to C^p(\mathcal{SA}(V),\Omega^n)]
\end{aligned}
$$

Ce dernier espace sera noté Q_p. Il s'interprète naturellement comme l'espace des p-cochaînes sur $\mathcal{SA}(V)$ à coefficients dans la représentation scalaire qui sont de la forme

$$c(\xi_1, \ldots, \xi_p) = \int_V \gamma(\xi_1, \ldots, \xi_p) \quad \text{où} \quad \gamma \in C^p(\mathcal{SA}(V), \Omega^n)$$

(cf. par exemple l'approche de V. Guillemin [6] pour la cohomologie de Gelfand-Fuks et le résultat de M. De Wilde [2]). Le complexe Q_* permet de calculer la cohomologie de $\mathcal{SA}(V)$ à coefficients scalaires. Il vient

$$E_1^{p,0} = H^p(\mathcal{SA}(V), \mathcal{SA}(V)) \quad , \quad E_2^{p,1} = H^p(Q_*).$$

Dans les différentielles d'ordre supérieur, la seule éventuellement non nulle est $d_2 : E_2^{p,1} \to E_2^{p+2,0}$ si bien que $E_\infty^{p,1} = \operatorname{Ker} d_2$ et $E_\infty^{p+2,0} = \operatorname{Coker} d_2$.

D'où le lemme 2 ci-dessous pour l'hypercohomologie de $\mathcal{C}^*(\mathcal{SA}(V), \mathcal{SA}(V))$.

Lemme 2. *On a une suite exacte courte*

$$0 \to E_\infty^{p-1,1} \to \mathbb{H}^p(\mathcal{C}^*(\mathcal{SA}(V), \mathcal{SA}(V))) \to E_\infty^{p,0} \to 0.$$

On notera que l'hypercohomologie est engendrée par la cohomologie de $\mathcal{SA}(V)$ dans la représentation adjointe et par celle du complexe Q_*. On calcule facilement que (cf. [9] pour la dernière égalité)

$$\begin{aligned} H^0(Q_*) &= H^0(\mathcal{SA}(V), \mathbb{R}) = \mathbb{R}, \\ H^1(Q_*) &= H^1_{DR}(V), \\ H^2(Q_*) &= H^2(\mathcal{SA}(V), \mathbb{R}) = H^2_{DR}(V). \end{aligned}$$

Un résultat de Lichnerowicz ([9], Théorème 2) implique que $H^1(\mathcal{SA}(V), \mathcal{SA}(V)) = 0$. Dès lors,

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^0(\mathcal{C}^*(\mathcal{SA}(V), \mathcal{SA}(V))) &= H^0(\mathcal{SA}(V), \mathcal{SA}(V)) \\ &= Inv_{\mathcal{SA}(V)} \mathcal{SA}(V) = 0, \\ \mathbb{H}^1(\mathcal{C}^*(\mathcal{SA}(V), \mathcal{SA}(V))) &= \mathbb{R}, \\ \mathbb{H}^2(\mathcal{C}^*(\mathcal{SA}(V), \mathcal{SA}(V))) &= H^1_{DR}(V) \oplus H^2(\mathcal{SA}(V), \mathcal{SA}(V)), \\ \mathbb{H}^3(\mathcal{C}^*(\mathcal{SA}(V), \mathcal{SA}(V))) &= H^2_{DR}(V) \oplus H^3(\mathcal{SA}(V), \mathcal{SA}(V)). \end{aligned}$$

D'autre part, $H^0(\mathcal{SA}(V),\Omega^p) = Inv_{\mathcal{SA}(V)}\Omega^p = 0$ si $p \neq n$ et $H^0(\mathcal{SA}(V),\Omega^n)$ est engendré par les multiples de la forme volume. Donc,

$$\mathbb{H}^0(\mathcal{C}^*(\mathcal{SA}(V),\Omega^n)) \xrightarrow{\partial} \mathbb{H}^1(\mathcal{C}^*(\mathcal{SA}(V),\mathcal{SA}(V)))$$

est un isomorphisme.

Nous sommes finalement ramenés à la suite exacte suivante qui se déduit de (2.1) et des calculs précédents:

$$\begin{aligned}
&0 \xrightarrow{\partial} H^1(\mathcal{SA}(V),\Omega^{n-1}) \to H^1(\mathcal{SA}(V),\Omega^n)\\
&\xrightarrow{\partial} H^1_{DR}(V) \oplus H^2(\mathcal{SA}(V),\mathcal{SA}(V))\\
&\to H^2(\mathcal{SA}(V),\Omega^{n-1}) \to H^2(\mathcal{SA}(V),\Omega^n)\\
&\xrightarrow{\partial} H^2_{DR}(V) \oplus (\mathcal{SA}(V),\mathcal{SA}(V)))\\
&\to H^3(\mathcal{SA}(V),\Omega^{n-1}) \to H^3(\mathcal{SA}(V),\Omega^n) \xrightarrow{\partial} \cdots
\end{aligned} \tag{2.2}$$

2.2 Calcul de $H^k(\mathcal{SA}(V),\Omega^\ell)$ ($\ell = n-1, n$) à l'aide de la suite spectrale de Lozik pour $k \leq 3$ et rigidité infinit ésimale pour $n \neq 3$

Le formalisme de l'hypercohomologie introduit précédemment permet de décrire explicitement la suite spectrale de Lozik (cf. [4] et [12]) de façon directe. Nous avons vu que

$$H^k(\mathcal{SA}(V),\Omega^\ell) = \mathbb{H}^k(\mathcal{C}^*(\mathcal{SA}(V),\Omega^\ell)).$$

On peut maintenant étudier la seconde suite spectrale d'hypercohomologie. Ce n'est autre que la seconde suite spectrale du bicomplexe calculant la cohomologie de V à coefficients dans le complexe de faisceaux; on fait apparaître ainsi les faisceaux de cohomolog ie $\mathcal{H}(\mathcal{SA}(V),\Omega^\ell)$ et la suite spectrale s'écrit

$$E_2^{p,q} = H^p(V,\mathcal{H}^q(\mathcal{SA}(V),\Omega^\ell)) \Rightarrow H^{p+q}(\mathcal{SA}(V),\Omega^\ell).$$

Comme dans le cas de l'algèbre de Lie de tous les champs tangents, on peut identifier le faisceau de cohomologie à l'aide d'algèbres de champs formels. Notons $SW(n)$ l'algèbre des champs de vecteurs formels associée à $\mathcal{SA}(V)$; l'algèbre de tous les champs formels est notée $W(n)$. Comme toutes les algèbres de champs formels, $SW(n) = \{X \in$

$W(n)/Div(X) = 0\}$ admet une filtration par l'ordre de différentiabilité, soit

$$SW(n) = \mathbb{R}^n \oplus s\ell(n) \oplus s\ell(n)^{(2)} \oplus \cdots \oplus s\ell(n)^{(k)} \oplus \cdots ,$$

où $s\ell(n)^{(k)}$ désigne le k-ième prolongement de $s\ell(n)$. On peut décrire $s\ell(n)^{(k)}$ en terme de représentations tensorielles de $s\ell(n)$. Posons $\mathbb{R}^n = E$, on a alors

$$s\ell(n)^{(k)} = \left\{ \sum_{i=1}^{a} \alpha_i \otimes X_i \in S^k E^* \otimes E / \sum_{i=1}^{a} i(X_i)\alpha_i = 0 \right\}.$$

Soit

$$SW(n)_{(0)} = s\ell(n) \oplus s\ell(n)^{(2)} \oplus \cdots \oplus s\ell(n)^{(k)} \oplus \cdots$$

la sous-algèbre des champs formels sans termes constants de $SW(n)$; $\mathcal{H}^q(\mathcal{SA}(V), \Omega^\ell)$ est le faisceau localement constant de fibre $H^q(SW(n)_{(0)}, \Lambda^\ell E^*)$ (voir appendice 2). Cette dernière cohomologie est associée à l'action de $SW(n)_{(0)}$ sur $\Lambda^\ell E^*$ déduite de l'action naturelle de $s\ell(n)$ sur $\Lambda^\ell E^*$, l'algèbre extérieure sur l'espace dual E^*. Le faisceau de cohomologie étant localement constant, on a

$$E^{p,q} = H^p(V, \mathcal{H}^q(\mathcal{SA}(V), \Omega^\ell)) = H^p_{DR}(V) \otimes H^q(SW(n)_{(0)}, \Lambda^\ell E^*).$$

On retrouve ainsi un aspect familier de la cohomologie de Gelfand-Fuks : l'apparition d'une partie formelle et d'une partie géométrique, provenant de la cohomologie de De Rham. Il faut donc calculer $H^*(SW(n)_{(0)}, \Lambda^\ell E^*)$. Cette cohomologie peut s'attaquer à l'aide de la suite spectrale de Hochschild-Serre relative à l'idéal $SW(n)_{(1)} = \oplus_{k \geq 1} s\ell(n)^{(k)}$.

On a pour la suite spectrale de Hochschild-Serre de la suite exacte d'algèbres de Lie :

$$0 \to SW(n)_{(1)} \to SW(n)_{(0)} \to s\ell(n) \to 0,$$

$$E_2^{p,q} = H^p(s\ell(n), H^q(SW(n)_{(1)}, \Lambda^\ell E^*)) \Rightarrow H^{p+q}(SW(n)_{(0)}, \Lambda^\ell E^*).$$

De plus,

$$\begin{aligned} &H^p(s\ell(n), H^q(SW(n)_{(1)}, \Lambda^\ell E^*)) \\ &\quad = H^p(s\ell(n)) \otimes H^q(Inv_{s\ell(n)} \Lambda^*(SW(n)_{(1)}, \Lambda^\ell E^*)). \end{aligned}$$

Un problème préalable est donc le calcul des invariants

$$Inv_{s\ell(n)}\Lambda^q(SW(n)_{(1)},\Lambda^\ell E^*) \tag{2.3}$$

pour $\ell = n-1, n$. Rappelons que les invariants de $s\ell(n)$ sont tous engendrés par les contractions entre l'espace et son dual, et par le déterminant (cf. H. Weyl [13]). Si $q=0$ et $\ell = n-1$, il n'y a pas d'invariants. Si $q=0$ et $\ell=n$, le déterminant est le seul invariant. Pour le cas général, on a $s\ell(n)^k \subset S^kE^*\otimes E$ comme indiqué ci-dessus et donc

$$\Lambda^q(SW(n)_{(1)},\Lambda^\ell E^*) \subset \bigoplus_{\substack{(k_1,\dots,k_q)\\ k_i\geq 1}} \left[\bigotimes_{i=1}^{q}(S^{k_i+1}E\otimes E^*)\otimes\Lambda^\ell E^*\right].$$

Pour $q=1$, $S^{k+1}E\otimes E^*\otimes\Lambda^\ell E^*$ ne donne naissance à aucun invariant, car la contraction symétrique-antisymétrique ne donne pas de termes non nuls. Pour $q=2$, on est dans un sous-espace de

$$S^{k_1+1}E\otimes E^*\otimes S^{k_2+1}E\otimes E^*\otimes\Lambda^\ell E^*.$$

Les termes contravariants sont au nombre de $k_1+k_2+2\geq 4$. Soient

$$A\otimes\eta\in s\ell(n)^{k_1}\subset S^{k_1+1}E\otimes E^* \quad \text{et} \quad B\otimes\xi\in s\ell(n)^{k_2}\subset S^{k_2+1}=E\otimes E^*.$$

Les contractions $i(\eta)A$ et $i(\xi)B$ donnent zéro. Les seules contractions possibles sont donc $i(\eta)B\in S^{k_2}E$ et $i(\xi)A\in S^{k_1}E$. Il faut ensuite contracter avec $\Lambda^\ell E^*$. La seule possibilité non triviale apparaît quand $\ell=2$, $k_1=k_2=1$. Donc (2.3) est nul si $\ell\neq 2$ et $q=2$ tandis qu'il est de dimension 1 pour $\ell=q=2$. Il est alors engendré par l'invariant I dont les seules valeurs non nulles sont données par

$$I(\alpha\otimes X,\,\beta\otimes Y) = i(Y)\alpha\wedge i(X)\beta, \quad \alpha,\beta\in S^2E^*.$$

Comme d'autre part $H^k(s\ell(n))=0$ si $k=1,2$, toute la cohomologie de $SW(n)_{(0)}$ en degrés 1 et 2 provient des invariants, et on peut déduire de ces calculs que

$$\begin{aligned}
&H^0(SW(n)_{(0)},\Lambda^\ell E^*) = 0 \text{ si } \ell\neq n,\\
&H^0(SW(n)_{(0)},\Lambda^n E^*) \text{ est de dimension } 1,\\
&H^1(SW(n)_{(0)},\Lambda^\ell E^*) = 0 \text{ quel que soit } \ell,\\
&H^2(SW(n)_{(0)},\Lambda^\ell E^*) = 0 \text{ si } \ell\neq 2,\\
&H^2(SW(n)_{(0)},\Lambda^2 E^*) = \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $H^1(\mathcal{SA}(V), \Omega^{n-1}) = 0$.

L'espace $H^1(\mathcal{SA}(V), \Omega^n)$ est engendré par le terme $E_2^{1,0}$ de la suite spectrale de Lozik; comme $H^0(SW(n)_{(0)}, \Lambda^n E^*)$ est engendré par le déterminant, on a $H^1(\mathcal{SA}(V), \Omega^n) = H^1_{DR}(V)$. Une 1 forme fermée α induit un 1-cocycle c_α défini par $c_\alpha(X) = \alpha(X)\omega$.

On en déduit que le connectant ∂ de la suite exacte (2.3) induit un isomorphisme

$$\partial : H^1_{DR}(V) \to H^1_{DR}(V)$$

et donc que

$$\begin{aligned} H^2(\mathcal{SA}(V), \mathcal{SA}(V)) = \ker(D^* : H^2(\mathcal{SA}(V), \Omega^{n-1}) \\ \to H^2(\mathcal{SA}(V), \Omega^n)). \end{aligned}$$

Mais si $n \neq 3$, on déduit du calcul ci-dessous et de la suite spectrale de Lozik que $H^2(\mathcal{SA}(V), \Omega^{n-1}) = 0$. Donc, si $n \neq 3$, $H^2(\mathcal{SA}(V), \mathcal{SA}(V)) = 0$. D'où le théorème

Théorème 3. *Si la dimension de V est différente de 3, l'algèbre de Lie des champs unimodulaires sur V est rigide et infinitésimalement rigide.*

2.3 Le cas où $\dim(V) = 3$

Il s'agit d'étudier le noyau de

$$D^* : H^2(\mathcal{SA}(V), \Omega^2) \to H^2(\mathcal{SA}(V), \Omega^3).$$

Ces deux espaces se calculent à l'aide de la suite spectrale de Lozik.

Pour $H^2(\mathcal{SA}(V), \Omega^2)$, on a $E_2^{0,2} = H^2(SW(n)_{(0)=}, \Lambda^2 E^*) = \mathbb{R}$, engendré par l'invariant I défini ci-dessus. Comme d'autre part, $H^i(SW(n)_{(0)}, \Lambda^2 E^*) = 0$ pour $i \leq 1$, toutes les différentielles de la suite spectrale concernée sont nulles et $E_2^{0,2} = E_\infty^{0,2}$. Par conséquent, $H^2(\mathcal{SA}(V), \Omega^2)$ est de dimension 1, engendré par un élément correspondant à l'invariant I défini ci-dessus; une expression globale d'un cocycle non trivial en terme d'une connexion linéaire est donnée dans l'appendice 3.

Pour $H^2(\mathcal{SA}(V), \Omega^3)$, le seul élément concerné dans la cohomologie de $SW(n)$ est $H^0(SW(n)_{(0)}, \Lambda^3 E^*)$ correspondant à la forme volume et donc $E_2^{0,2} = H^2_{DR}(V)$. Là encore, $E_2^{0,2} = E_\infty^{0,2}$ et donc $H^2_{DR}(\mathcal{SA}(V), \Omega^3)$ s'identifie à $H^2_{DR}(V)$. On associe à une 2-forme fermée α induisant $[\alpha] \in H^2_{DR}(V)$ un 2-cocycle $c_\alpha \in C^2(\mathcal{SA}(V), \Omega^3)$ défini par $c_\alpha(X, Y) =$

$\alpha(X,Y)\omega$. On peut alors voir facilement que l'application de la suite (2.3) induit un isomorphisme $H^2_{DR} \xrightarrow{\partial} H^2_{DR}(V)$ envoyant la classe de c_α sur la classe à coefficients scalaires de d_α donnée par $d_\alpha(X,Y) = \int_V \alpha(X,Y)\omega$.

Par conséquent, $\operatorname{Ker} D^* = H^2(\mathcal{SA}(V),\Omega^2)$ et nous avons montré la

Proposition. *Si* $\dim(V) = 3$, $H^2(\mathcal{SA}(V),\mathcal{SA}(V))$ *est de dimension* 1.

3. La rigidité de $\mathcal{SA}(V)$ en dimension 3

Il faut maintenant étudier l'obstruction éventuelle à prolonger les déformations infinitésimales de $\mathcal{SA}(V)$ quand $\dim V = 3$. Il s'agit d'identifier la classe de cohomologie du crochet de Richardson-Nijenhuis $[[\mathcal{I},\mathcal{I}]]$ dans $H^3(\mathcal{SA}(V),\mathcal{SA}(V))$, où $\mathcal{I}$ est un générateur de $H^2(\mathcal{SA}(V),\mathcal{SA}(V))$. Remarquons tout d'abord que le bord $\partial : H^2_{DR}(V) \to H^2_{DR}(V)$ dans la suite exacte (2.3), étant un isomorphisme,

$$H^3(\mathcal{SA}(V),\mathcal{SA}(V)) = \operatorname{Ker}(H^3(\mathcal{SA}(V),\Omega^2) \xrightarrow{D^*} H^3(\mathcal{SA}(V),\Omega^3)).$$

Le calcul de ces deux derniers espaces via la suite spectrale de Lozik nécessite un calcul d'invariants pour déterminer $H^3(SW(n)_{(0)},\Lambda^\ell E^*)$ pour $\ell = 2,3$.

Nous aurons donc à considérer des tenseurs dans $S^aE^* \otimes E$ et pour ce faire, nous utiliserons les notations suivantes. Pour $\alpha \in E^*$, on pose

$$\alpha^a = \frac{1}{a!}\underbrace{(\alpha \vee \ldots \vee \alpha)}_{a \text{ fois}},$$

où $\vee$ désigné le produit symétrique. On notera Λ le 3-tenseur de volume dans $\Lambda^3 E$. Avec ces notations, l'invariant I défini ci-dessus s'écrit

$$I(\alpha^2 \otimes X,\, \beta^2 \otimes Y) = \langle \alpha, Y\rangle \langle \beta, X\rangle\, \alpha \wedge \beta.$$

On dira qu'un invariant est de poids $(a_1,\ldots,a_p)$ avec $a_i \geq 2$ s'il est non nul sur $s\ell(n)^{(a_1-1)} \times \cdots \times s\ell(n)^{(a_p-1)}$ et nul ailleurs. Le poids total est alors $a_1 + \cdots + a_p$.

L'invariant I est de poids (2,2). On trouve dans $\Lambda^3(SW(n)_{(1)},\Lambda^2E^*)$ trois invariants indépendants notés J,K,L de poids $(4,2,2)$, $(3,3,2)$ et

$(3,3,2)$ respectivement. Ils sont donnés par

$$\begin{aligned}
&J(\alpha^4 \otimes X, \beta^2 \otimes Y, \gamma^2 \otimes Z) \\
&\quad = \langle \Lambda, \alpha \wedge \beta \wedge \gamma \rangle \left(\langle \alpha, Y \rangle \langle \alpha, Z \rangle \langle \beta, X \rangle \alpha \wedge \gamma \right. \\
&\qquad + \left(\langle \alpha, Y \rangle \langle \alpha, Z \rangle \langle \gamma, X \rangle \alpha \wedge \beta \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&K(\alpha^3 \otimes X, \beta^3 \otimes Y, \gamma^2 \otimes Z) \\
&\quad = \langle \Lambda, \alpha \wedge \beta \wedge \gamma \rangle \left(\langle \alpha, Y \rangle \langle \beta, X \rangle \langle \beta, Z \rangle \alpha \wedge \gamma \right. \\
&\qquad + \left(\langle \alpha, Y \rangle \langle \beta, X \rangle \langle \alpha, X \rangle \beta \wedge \gamma \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&L(\alpha^3 \otimes X, \beta^3 \otimes Y, \gamma^2 \otimes Z) \\
&\quad = \langle \Lambda, \alpha \wedge \beta \wedge \gamma \rangle \left(\langle \alpha, Y \rangle \langle \beta, Z \rangle \langle \gamma, X \rangle \right. \\
&\qquad + \left(\langle \alpha, Z \rangle \langle \beta, X \rangle \langle \alpha, Y \rangle \right) \alpha \wedge \beta.
\end{aligned}$$

D'autres invariants de poids total $(4+k, 2+k, 2+k)$ ou $(3+k,\ 3+k,\ 2+k)$ peuvent s'obtenir à partir de J, K, L en multipliant par $\langle \Lambda, \alpha \wedge \beta \wedge \gamma \rangle^k$, mais il est clair que l'invariant associé à la classe $[[\mathcal{I}, \mathcal{I}]] \in H^3(\mathcal{SA}(V), \mathcal{SA}(V))$ doit être de poids total 8. Ces trois invariants définissent des cocycles dans $\Lambda^3(SW(n)_{(1)}, \Lambda^2 E^*)$ et donc trois générateurs indépendants dans $E_2^{0,3} = H^3(SW(n)_{(0)}, \Lambda^2 E^*)$. La seule différentielle de la suite spectrale de Lozik entrant en ligne de compte est donc $d_2 : E_2^{0,3} \to E_2^{2,2}$. Dans le cas où $H^2_{DR}(V) \neq 0$, on pourrait avoir $d_2 \neq 0$ et donc certains cocycles de $E_2^{0,3}$ pourraient ne pas induire de cocycles globaux sur $\mathcal{SA}(V)$. Mais tout cocycle non trivial de $E_2^{0,3}$ qui se prolonge le fait selon un cocycle non trivial de $\mathcal{SA}(V)$. Nous allons voir que c'est en particulier le cas de $J + K$ puisque l'on a

Proposition. *La classe* $[[\mathcal{I}, \mathcal{I}]] \in H^3(\mathcal{SA}(V), \mathcal{SA}(V))$ *est induite par celle de* $J + K$ *dans* $E_2^{0,3}$*; en particulier, elle est non triviale.*

Démonstration. Le crochet de Richardson-Nijenhuis sur $C^*(\mathcal{SA}(V),$ $\mathcal{SA}(V))$ est évidemment local. On peut donc le prolonger naturellement à tout complexe de Čech à valeurs dans $C^*(\mathcal{SA}(V), \mathcal{SA}(V))$. On a

$$\begin{aligned}
&\check{C}^k(\mathcal{U}, C^*(\mathcal{SA}(V), \mathcal{SA}(V)) \\
&\qquad = \prod_{(i_0, i_1, \dots, i_k)} C^*(\mathcal{SA}(V), \mathcal{SA}(V)(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k})),
\end{aligned}$$

et il suffit de calculer le crochet sur chaque ouvert. Cela donne un crochet bigradué

$$\check{C}^k(\mathcal{U}, C^p(\mathcal{SA}(V), \mathcal{SA}(V))) \times \check{C}^\ell(\mathcal{U}, C^q(\mathcal{SA}(V), \mathcal{SA}(V)))$$
$$\to \check{C}^{k+\ell}(\mathcal{U}, C^{p+q+1}(\mathcal{SA}(V), \mathcal{SA}(V))),$$

que l'on notera encore $[[,]]$. Les différentielles de Čech et de Chevalley-Eilenberg sont des dérivations de ce crochet. Nous allons utiliser une représentation de la classe $\mathcal{I}$, en cohomologie de Čech, de façon à nous ramener à un calcul au niveau formel. Nous avons remarqué que l'invariant correspondant à I dans $H^2(\mathcal{SA}(V), \Omega^2)$ admettait une description globale en terme du cocycle ϕ_Γ associé à une connexion (cf. appendice 3); mais en général, $i_{\phi_\Gamma(X,Y)}\Lambda$= n'est pas un champ de vecteurs unimodulaire si la connexion Γ n'est pas plate; on ne dispose donc pas d'un cocycle canonique dont la classe de cohomologie est $\mathcal{I}$. On peut procéder localement. Prenons sur chaque U_i une connexion plate Γ_i. Sur $U_i \cap U_j$, la différence $\phi_{\Gamma_i} - \phi_{\Gamma_j}$ est le bord de Chevalley-Eilenberg d'une cochaîne

$$c_{ij} : \mathcal{SA}(V)|_{U_i \cap U_j} \to \Omega^2(V)|_{U_i \cap U_j}.$$

On en déduit

$$i_{\phi_{\Gamma_i}(X,Y)}\Lambda - i_{\phi_{\Gamma_j}(X,Y)}\Lambda = df_{ij}(X,Y)$$

avec

$$f_{ij} : \mathcal{SA}(V)|_{U_i \cap U_j} \to \mathcal{SA}(V)|_{U_i \cap U_j}.$$

Mais, comme les Γ_i sont plats, $i_{\phi_{\Gamma_i}(X,Y)}\Lambda$ est dans $\mathcal{SA}(V)|_{U_i}$. On a trouvé ainsi une 0-cochaîne de Čech $\check{\mathcal{I}} \in C^0(\mathcal{U}, Z^2(\mathcal{SA}(V), \mathcal{SA}(V))$:

$$\check{\mathcal{I}}(X,Y) = i_{\phi_{\Gamma_i}(X,Y)}\Lambda$$

telle que si l'on note δ la différentielle de Čech, alors $\delta\check{\mathcal{I}} = -d\check{f}$, où $\check{f}$ est le 1-cocycle de Čech dans $\check{Z}^1(\mathcal{U}, C^1(\mathcal{SA}(V), \mathcal{SA}(V)))$ défini par $(\check{f})_{ij}(X) = f_{ij}(X)$. Donc $\check{\mathcal{I}} + \check{f}$ définit un 2-cocycle dans l'hypercohomologie du complexe $C^*(\mathcal{SA}(V), \mathcal{SA}(V))$, calculée par des résolutions de Čech. La forme locale de $\phi_\Gamma(X,Y)$ dans le cas plat nous permet de voir que $\check{\mathcal{I}}$ correspond à l'invariant I et donc que la classe de cohomologie de $\check{\mathcal{I}} + \check{f}$ est égale à $\mathcal{I}$. Nous allons utiliser cette représentation de $\mathcal{I}$ pour calculer le crochet de Richardson-Nijenhuis $[[\mathcal{I}, \mathcal{I}]]$.

La nature locale de ce crochet permet de voir que le calcul du crochet de $\mathcal{I}$ avec lui-même fait apparaître dans $\check{C}^0(\mathcal{U}, Z^3(\mathcal{SA}(V), \mathcal{SA}(V)))$ le

0-cocycle égal à $[[\check{\mathcal{I}}_i, \check{\mathcal{I}}_i]]$ sur U_i; nous le noterons $[[\check{\mathcal{I}}, \check{\mathcal{I}}]]$. Dans $U_i \cap U_j$, on a :

$$[[\check{\mathcal{I}}_i, \check{\mathcal{I}}_i]] = [[\check{\mathcal{I}}_j, \check{\mathcal{I}}_j]] + 2[[d\check{f}_{ij}, \check{g}_i]] + [[d\check{f}_{ij}, d\check{f}_{ij}]] = [[\check{\mathcal{I}}_j, \check{\mathcal{I}}_j]] + d\check{g}_{ij},$$

où $\check{g}_{ij} = 2[[\check{f}_i, \check{\mathcal{I}}_i]] + = [[\check{f}_{ij} + d\check{f}_{ij}]]$ et définit donc une 1-cochaîne $\check{g} \in \check{C}(\mathcal{U}, C^2(\mathcal{SA}(V), \mathcal{SA}(V)))$. Comme $\delta[[\check{\mathcal{I}}, \check{\mathcal{I}}]] = d\check{g}$, $[[\check{\mathcal{I}}, \check{\mathcal{I}}]] - \check{g}$ est bien un 3-cocycle d'hypercohomologie dont la classe dans $H^3(\mathcal{SA}(V), \mathcal{SA}(V))$ est égale à $[[\check{\mathcal{I}}, \check{\mathcal{I}}]]$. Tout se ramène donc à l'identification de $[[\check{\mathcal{I}}_i, \check{\mathcal{I}}_i]]$, autrement dit au calcul dans le cas plat. Mais pour une connexion plate, on peut écrire en coordonnées locales

$$i_{\phi_{\Gamma_i}(X,Y)} = \partial_{ua} X^v \partial_{vb} Y^u \partial_c.$$

On peut l'identifier à l'invariant correspondant à I; on peut tout d'abord ramener I à un invariant à valeurs dans E puisque $E = \Lambda^2 E^*$ comme $s\ell(3)$-module, puis le prolonger en une 2-cochaîne $s\ell(3)$-invariante de $SW(3)$ à valeurs dans $SW(3)$, notée encore I. Pour $a, b \geq 2$, on a

$$I(\alpha^a \otimes X,\, \beta^b \otimes Y) = \langle \alpha, Y\rangle \langle \beta, X\rangle \,(\alpha^{a-2}\beta^{b-2} \otimes i(\alpha \wedge \beta)\Lambda).$$

On remarque immédiatement que cette formule donne le jet de $i_{\phi_{\Gamma_i}(X,Y)}\Lambda$ en fonction de ceux de $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$. On calcule alors facilement $[[I, I]]$: ce cocycle est non trivial sur les triplets $(\alpha^a \otimes X,\, \beta^b \otimes Y,\, \gamma^c \otimes Z)$ pour $(a, b, c) = (3, 3, 2)$ ou (4,2,2) et

$$[[I, I]](\alpha^3 \otimes X,\, \beta^3 \otimes Y,\, \gamma^3 \otimes Z) = K(\alpha^3 \otimes X,\, \beta^3 \otimes Y,\, \gamma^2 \otimes Z),$$
$$[[I, I]](\alpha^4 \otimes X,\, \beta^2 \otimes Y,\, \gamma^2 \otimes Z) = J(\alpha^4 \otimes X,\, \beta^2 \otimes Y,\, \gamma^2 \otimes Z).$$

Le crochet $[[\check{\mathcal{I}}_i, \check{\mathcal{I}}_i]]$ correspond à l'invariant $K + J$ dans $Z^3(\mathcal{SA}(V), \mathcal{SA}(V))|_I$, et on a donc bien la non trivialité de $[[\check{\mathcal{I}}, \check{\mathcal{I}}]]$. D'où le théorème

Théorème 4. *Si la dimension de V est égale à 3, alors l'algèbre $\mathcal{SA}(V)$ est rigide.*

APPENDICE 1

Rappels sur l'hypercohomologie (cf. par exemple Godement [5]).

Nous nous placerons d'emblée dans le cadre des variétés différentiables bien que les résultats soient valables dans un cadre bien plus général.

Si $(\mathcal{F}^*, d)$ est un complexe de faisceaux sur une variété différentiable V, considérons une résolution de chacun des $\mathcal{F}^p$ par des faisceaux acycliques (flasques, fins par exemple) notée $(C^*(V, \mathcal{F}^p), \delta)$. On obtient alors un bicomplexe $((C^*(V, \mathcal{F}^p), d + \delta)$. L'hypercohomologie de V à coefficients dans $\mathcal{F}^*$ est alors par définition la cohomologie de ce bicomplexe,

$$\mathbb{H}(\mathcal{F}^*) = H^*((C(V, \mathcal{F}^p), f + \delta).$$

(Pour la définition en terme de foncteurs dérivés, voir [5]). Sur un bicomplexe, on a les deux filtrations possibles qui induisent les deux suites spectrales du bicomplexe.

La première vérifie ${}'E_1^{p,q} = H^q(V, \mathcal{F}^p)$ et $d_1 : H^q(V, \mathcal{F}^p) \to H^q(V, \mathcal{F}^{p+1})$ est induit par la différentielle d. D'où

$${}''E_2^{pq} = H^p(H^q(V, \mathcal{F}^*), d_1) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}(\mathcal{F}^*).$$

La seconde vérifie ${}''E_1^{p,q} = C^p(V, \mathcal{H}^q)$ où $\mathcal{H}^q$ est le faisceau de cohomologie en degré q associé au complexe $(\mathcal{F}^*, d)$. D'où

$${}''E_2^{p,q} = H^p(V, \mathcal{H}^q) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}(\mathcal{F}^*).$$

Ces suites spectrales dégénèrent dans certains cas particuliers.

(1) Si les faisceaux $\mathcal{F}^*$ sont acycliques, alors ${}'E_1^{p,q} = 0$ si $q > 0$ et ${}'E_1^{p,0} = \mathcal{F}^p(V)$. La première suite spectrale dégénère. On obtient $\mathbb{H}^p(\mathcal{F}^*) = H^p(\mathcal{F}^*(V), d)$.

(2) Si le complexe $\mathcal{F}^*$ est la résolution d'un faisceau Φ, on a $\mathcal{H}^p = 0$ si $p \neq 0$ et $\mathcal{H}^0 = \Phi$. C'est alors la seconde suite spectrale qui dégénère : ${}''E_2^{p,q} = 0$ si $q \neq 0$ et ${}''E_2^{p,0} = H^p(V, \Phi)$ si bien que $\mathbb{H}^p(\mathcal{F}^*) = H^p(V, \Phi)$.

Si on a simultanément (1) et (2), on en conclut que

$$H^p(V, \Phi) = H^p(\mathcal{F}^*(V), d).$$

On obtient ainsi la méthode classique de calcul de la cohomologie à coefficients dans un faisceau donné : on prend une résolution par des faisceaux acycliques, puis on calcule la cohomologie du complexe des sections globales.

Enfin, à une suite exacte courte de complexes de faisceaux

$$0 \to \mathcal{K}^* \to \mathcal{F}^* \to \mathcal{G}^* \to 0$$

correspond une suite exacte longue en hypercohomologie :

$$\cdots \to \mathbb{H}^p(\mathcal{K}^*) \to \mathbb{H}^p(\mathcal{F}^*) \to \mathbb{H}^p(\mathcal{G}^*) \xrightarrow{\partial} \mathbb{H}^{p+1}(\mathcal{K}^*) \to \mathbb{H}^{p+1}(\mathcal{G}^*) \to \cdots$$

obtenue aisément à partir de la suite exacte courte des bicomplexes.

APPENDICE 2

Le faisceau de cohomologie associé à $\mathcal{C}^*(\mathcal{SA}(V), \mathcal{F})$.

Nous donnons ici une description rapide et adaptée au cas de $\mathcal{SA}(V)$ du résultat de K. Shiga ([12], p. 357–358).

Notons $\mathcal{F}$ le faisceau des sections d'un fibré vectoriel F de fibre type $\mathbb{F}$ associé au fibré des repères de V. Plaçons-nous dans une carte locale U avec coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans laquelle F se trivialise avec une base de sections (e_α), $\alpha = 1, \dots, k$, associée à une base de $\mathbb{F}$ notée aussi (e_α), $\alpha = 1, \dots, k$.

Les cochaînes $\mathcal{C}^p(\mathcal{SA}(V), \mathcal{F})|_U$ sont de la forme

$$L = \sum_{\alpha=1}^{k} L^\alpha \otimes e_\alpha,$$

où les L^α sont des p-cochaînes sur $\mathcal{SA}(V)$ à valeurs dans l'espace des fonctions qui sera noté N.

En suivant les notations de [12], on définit $\omega_A^\mu \in \mathcal{C}^1(\mathcal{SA}(V), N)|_U$ par

$$\omega_A^\mu(X) = \frac{\partial X^\mu}{\partial x^A},$$

où A est un multiindice $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ et $x^A = x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$. On pose $\omega_0^\mu(X) = X^\mu$. Chaque L^α s' écrit alors

$$L^\alpha = \sum_{\substack{(A_1, \dots, A_p) \in (\mathbb{N}^n)^p \\ (\mu_1, \dots, \mu_p) \subset (1, \dots, n)}} L^{\alpha, A_1 \dots A_p}_{\mu_1, \dots, \mu_p}(x) \omega_{A_1}^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \omega_{A_p}^{\mu_p},$$

la somme étant toujours finie.

Si tous les A_i sont nuls, la cochaîne

$$L^\alpha = \sum L^\alpha_{\mu_1,\dots,\mu_p}(x)\omega_0^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \omega_0^{\mu_p}$$

s'identifie à la p-forme différentielle dans U

$$\eta^\alpha = \sum L^\alpha_{\mu_1,\dots,\mu_p}(x)dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_p}.$$

On peut définir d'autre part le sous-espace

$$\mathcal{C}^p_c(\mathcal{SA}(V),\mathcal{F})|_U \subset \mathcal{C}^p(\mathcal{SA}(V),\mathcal{F})|_U$$

des cochaînes constantes. Ce sont celles pour lesquelles les $L^{\alpha,A_1\dots A_p}_{\mu_1,\dots,\mu_p}$ sont constants et nulles si l'un des A_i est nul.

On vérifie facilement que $\mathcal{C}^*_c(\mathcal{SA}(V),\mathcal{F})|_U \subset \mathcal{C}^*(\mathcal{SA}(V),\mathcal{F})|_U$ est un sous-complexe. L'écriture générale d'une cochaîne montre que l'on a un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués

$$\mathcal{C}^*(\mathcal{SA}(V),\mathcal{F})|_U = \mathcal{C}^*_c(\mathcal{SA}(V),\mathcal{F})|_U \otimes \Omega^*(U).$$

On peut expliciter la différentielle de Chevalley-Eilenberg en terme de l'écriture générale de la cochaîne, et on voit que l'isomorphisme ci-dessus est en fait un isomorphisme de complexes : la différentielle de $\mathcal{C}^*$ est le produit tensoriel de la différentielle de $\mathcal{C}^*_c$ et de la différentielle de De Rham.

La formule de Künneth donne alors :

$$\mathcal{H}^*(\mathcal{SA}(V),\mathcal{F})|_U = \mathcal{H}^*(\mathcal{C}^*_c(\mathcal{SA}(V),\mathcal{F}))|_U \otimes H^*_{DR}(U).$$

D'où l'identification au niveau des fibres :

$$\mathcal{H}^*(\mathcal{SA}(V),\mathcal{F}))_x = \mathcal{H}^*(\mathcal{C}^*_c(\mathcal{SA}(V),\mathcal{F}))_x.$$

Mais il est facile d'identifier la fibre type du faisceau localement constant $\mathcal{C}^*_c(\mathcal{SA}(V),\mathcal{F})_x$; on a

$$\mathcal{C}^p_c(\mathcal{SA}(V),\mathcal{F}))_x = C^p(SW(n)(0),\mathbb{F}).$$

A un élément du type $\omega^\mu_A \otimes e_\alpha$ est associée la 1-cochaîne sur $SW(n)(0)$

$$[\omega^\mu_A \otimes e_\alpha](P \otimes X) = \frac{\partial P}{\partial x^A}(0)X^\mu e_\alpha.$$

Ainsi,

Proposition. *Les faisceaux de cohomologie $\mathcal{H}^*(\mathcal{SA}(V),\mathcal{F})$ sont les faisceaux constants de fibre type $\mathcal{H}^*(SW(n)(0),\mathbb{F})$.*

Nous l'utilisons dans cet article pour le cas où $\mathcal{F}$ est un faisceau de formes différentielles.

Deux hypothèses sont essentielles ici : d'une part, F est un fibré associé au fibré des repères (ou éventuellement un prolongement de celui-ci); d'autre part, nous considérons les cochaînes sur $\mathcal{SA}(V)$ qui sont restrictions de cochaînes sur $\mathcal{A}(V)$; le faisceau d'algèbres de Lie $\mathcal{SA}(V)$ étant transitif (c'est-à -dire que pour tout $x \in V$ les sections de $\mathcal{SA}(V)$ engendrent T_xV), il paraît raisonnable de conjecturer que toute chaîne locale sur $\mathcal{SA}(V)$ se prolonge en une cochaîne locale de $\mathcal{A}(V)$; ce résultat impliquerait donc que notre hypothèse n'est pas restrictive.

APPENDICE 3

Construction globale du cocycle ϕ_Γ dans $C^2(\mathcal{A}(V),\Omega^2)$.

Pour la facilité du lecteur, nous décrirons ici une construction de ϕ_Γ ([3]).

Soit une connexion linéaire sans torsion sur V, dont la dérivée covariante est notée ∇. Nous considérons ∇ comme opérateur bidifférentiel sur $\mathcal{A}(V)$ à valeurs dans $\mathcal{A}(V)$. Pour $X \in \mathcal{A}(V)$, la dérivée de Lie $L_X\nabla$, définie par

$$(L_X\nabla)_Y(Z) = -\nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_Y[X,Z] + [X,\nabla_Y Z],$$

est un champ de tenseurs de type (2,1) sur V, symétrique en les variables covariantes. L'application $X \mapsto L_X\nabla$ est un 1-cocycle sur $\mathcal{A}(V)$ à valeurs dans l'espace $S^{2,1}(V)$ des champs de tenseurs de type (2,1). D'autre part, la trace

$$\begin{aligned} Tr : S^{2,1}(V) \times S^{2,1}(V) \to \Omega^2(V) : (A,B) \to Tr(AB)_{ij} \\ = A^\beta_{i\alpha}B^\alpha_{j\beta} - B^\alpha_{i\beta}A^\beta_{j\alpha} \end{aligned}$$

est invariante par l'action de $\mathcal{A}(V)$. L'application donnée par $\phi_\Gamma(X,Y) = Tr(L_X\nabla \wedge L_Y\nabla)$ est donc un 2-cocycle sur $\mathcal{A}(V)$ à valeurs dans Ω^2.

Si maintenant, on remplace Γ par une autre connexion $\bar\Gamma$, la dérivée covariante devient $\bar\nabla = \nabla + A$, où A est un champ de tenseurs de type (2,1). Les deux cocycles $X \mapsto L_X\nabla$ et $X \mapsto L_X\bar\nabla$ sont donc cohomologues et il en va de même pour ϕ_Γ et $\phi_{\bar\Gamma}$.

Dans le cas où Γ est plat, on a alors localement

$$(L_X\nabla)_Y Z = [X,Y]^i\partial_i Z + Y^i\partial_i[X,Z] - [X,Y^i\partial_i Z].$$

En particulier,

$$(L_X\nabla)_{\partial_a}\partial_b = \partial_a[X,\partial_b] = -\partial^2_{ab}X.$$

Donc

$$Tr(L_X\nabla, L_Y\nabla)_{ij} = \partial^2_{ai}X^b\partial^2_{bj}Y^a - \partial^2_{ai}Y^b\partial^2_{bi}X^a.$$

Lorsque $\dim V = 3$, un calcul direct montre que $i_{\phi_\Gamma(X,Y)}\Lambda \in \mathcal{SA}(V)$ lorsque X et Y sont unimodulaires. Ceci est faux lorsque Γ n'est pas plat.

References

[1] V. I. Arnold, *The asymptotic Hopf invariant and its applications*, Selecta Mathematica Soviet. **5** (1986) 327–345.

[2] M. De Wilde, *On the local Chevalley cohomology of the dynamical Lie algebra of a symplectic manifold*, Lett. Math. Phys. **5** (1981) 351–358.

[3] M. De Wilde & P. Lecomte, *Formal deformations of the Poisson-Lie algebra of a symplectic manifold and star product. Existence, equivalence, derivation*, NATO-Adv. Sci. Series **147**(1988) 897–960.

[4] D. B. Fuks, *Cohomology of infinite dimensional Lie algebras*, Consultants Bureau.

[5] R. Godement, *Théorie des faisceaux*, Hermann, Paris, 1958.

[6] V. Gullemin, *Cohomology of vector fields on a manifold*, Adv. Math. **10** (1973) 192–220.

[7] M. Gerstenhaber & S .D. Schack, *Algebraic cohomology and deformation theory*, NATO-Adv Sci. Series **147** (1988).

[8] A. Lichnerowicz, *Algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux d'une structure de contact*, J. Math. Pures Appl. **52** (1973) 473–508.

[9] ———, *Algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux d'une structure unimodulaire*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **24** (1974) 219–226.

[10] ———, *Déformations d'algèbres associées à une variété symplectique (les * produits)*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **32** (1982) 157–209.

[11] ———, Cohomologies attachées à une variété de contact et applications. J. Math. Pures Appl. **62** (1983) 269–304.

[12] K. Shiga, *Cohomology of Lie algebras over a manifold*, J. Math. Soc. Japan, **26** (1974) 324–361.

[13] H. Weyl, *The classical groups*, Princeton University Press, Princeton, 1946.

Université de Liège, Belgique
Université Claude Bernard, France